

آزمون فریدمن

(S-PLUS)

تدوین: مرکز تحلیل آماری خوارزمی

www.kharazmi-statistics.ir

مرکز آماری خوارزمی

مقدمه:

آزمون ناپارامتری معادل F به دست آمده از جدول تحلیل واریانس در طرح بلوکی تصادفی، آزمون فریدمن است. یکی از آزمون‌های آماری است که برای مقایسه چند گروه کاربرد دارد و از نظر میانگین رتبه‌های گروه‌ها را معلوم می‌کند که آیا این گروه‌ها می‌توانند از یک جامعه باشند یا نه؟ مقیاس در این آزمون باید حداقل رتبه‌ای باشد. این آزمون متناظر غیر پارامتری آزمون F است و معمولاً در مقیاس‌های رتبه‌ای به جای F به کار می‌رود و جانشین آن می‌شود. در آزمون F باید همگنی واریانس‌ها وجود داشته باشد که در مقیاس‌های رتبه‌ای کمتر رعایت می‌شود.

آزمون فریدمن برای تجزیه و تحلیل واریانس دو طرفه (برای داده‌های غیر پارامتری) به روش رتبه‌بندی به کار می‌رود و نیز برای مقایسه میانگین رتبه‌بندی گروه‌های مختلف کاربرد دارد. تحلیل واریانس دو طرفه رتبه‌ای فریدمن، این فرضیه را می‌آزماید که K گروه هم‌تا از توزیع پیوسته واحدی و یا از چند توزیع با میانه یکسان (در صورت متقارن بودن توزیع‌ها با میانگین یکسان) گرفته شده‌اند یا خیر؟

در ادامه چگونگی انجام آزمون فریدمن در نرم افزار $S-PLUS$ را آموزش می‌دهیم.

مطالبی که در این متن بیان شده است عبارتند از:

آزمون فریدمن

انجام آزمون فریدمن در نرم افزار $S-PLUS$

آزمون فریدمن

داده‌ها در این آزمون عبارتند از b متغیر k متغیره دوبه‌دو مستقل $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})$ که b بلوک نامیده می‌شوند x_{ij} ($i=1, 2, \dots, b$) متغیر تصادفی در بلوک i است. متناظر با تیمار j است.

b بلوک را به شرح زیر مرتب می‌کنیم.

بلوک ها	۱	۲	...	k
۱	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ik}
۲	x_{i1}	x_{i2}	...	x_{ik}
...	
b	x_{b1}	x_{b2}	...	x_{bk}

فرض کنید $R(x_{ij})$ رتبه‌ای باشد بین ۱ تا k که به (x_{ij}) در درون بلوک (سطر) i-ام نسبت داده می‌شود. یعنی، برای بلوک i-ام متغیرهای تصادفی $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik})$ با یکدیگر مقایسه می‌شوند و رتبه ۱ به کوچکترین مقدار مشاهده شده در بلوک ۲ به دومین کوچکترین مشاهده و به همین ترتیب رتبه k به بزرگترین مشاهده در بلوک i نسبت داده می‌شود. این تخصیص رتبه‌ها در همه b بلوک انجام می‌گیرد. در حالت وجود هم رتبه از متوسط رتبه‌ها استفاده می‌کنیم. بعد مجموع رتبه‌های هر تیمار را با نام $R_j = \sum_{i=1}^b R(x_{ij})$ به ازای $(j = 1, 2, \dots, k)$ به دست می‌آوریم. توجه کنید که در این آزمون به هیچ مقایسه‌ای بین بلوک‌های مختلف نیازی نیست.

شرایط:

۱. b متغیر تصادفی k متغیره دو به دو مستقل‌اند.
۲. می‌توان درون هر بلوک مشاهده را بر حسب ملاکی مطلوب رتبه‌بندی کرد.

فرض‌ها:

در این قسمت می‌خواهیم آزمون‌های زیر را انجام دهیم:

فرض H_0 : در هر رتبه بندی متغیرهای تصادفی در درون بلوک احتمال مساوی دارند.

فرض H_1 : حداقل، مشاهدات یکی از تیمارهای متفاوت از مشاهدات یک تیمار دیگر است.

آماره‌ی آزمون:

برای بدست آوردن آماره‌ی آزمون برای آزمون فوق مراحل زیر را باید طی کنیم:

ابتدا عبارت A_2 را که با $A_2 = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k [R(x_{ij})]^2$ مشخص می‌شود حساب می‌کنیم. اگر هم رتبه وجود نداشته باشد، A_2 به صورت

$$A_2 = \frac{bk(k+1)(2k+1)}{6}$$

$$B_2 = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^k R_j^2$$

ساده‌تر می‌شود. بعد عبارت را محاسبه می‌کنیم، با استفاده از این مقدار آماره آزمون عبارت است از:

$$T_2 = \frac{(b-1)[B_2 - bk(k+1)^2/4]}{A_2 - B_2}$$

فرض صفر را در سطح α رد می‌کنیم. اگر T_2 از چندک $(1-\alpha)$ ام توزیع F که در جدول مربوط با $k_1 = k - 1$ و $k_2 = (b-1)(k-1)$ درجه آزادی، به دست می‌آید بزرگتر باشد. در واقع، توزیع F تنها توزیع دقیق T_2 را تقریب می‌کند. اما تقریب نسبتاً خوبی است و وقتی b بزرگتر شود این تقریب بهتر می‌شود.

اگر $A_2 = B_2$ ، نقطه را در ناحیه بحرانی در نظر می‌گیریم و سطح معنی‌دار بودن را به صورت $\hat{\alpha} = \left(1/k\right)^{b-1}$ محاسبه می‌کنیم.

تذکر: اگر آماره آزمون را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$T_3 = \frac{(k-1)[bB_2 - b^2k(k+1)^2/4]}{A_2 - b^2k(k+1)^2/4}$$

آنگاه مقدار T_3 را با چندک‌های توزیع مربع کای دو با $k-1$ درجه آزادی می‌توان مقایسه کرد و آزمون را رد یا قبول کرد.

انجام آزمون فریدمن در نرم افزار S-PLUS

چگونگی آزمون فریدمن در نرم افزار S-PLUS را با طرح یک مثال شرح می‌دهیم.

مثال: در جدول پایین نمرات ۵ دانش آموز در سه درس ریاضی، فیزک و شیمی آورده شده است. آزمون فریدمن را برای یکسان بودن مجموع نمرات دانش آموزان انجام دهید.

	۱	۲	۳	۴	۵
ریاضی	۱۵	۱۸	۱۶	۲۰	۱۶
فیزیک	۱۹	۱۵	۱۹	۱۷	۱۹
شیمی	۱۸	۱۷	۱۸	۱۷	۲۰

H_0 : مجموع نمرات دانش‌آموزان برابر است

H_1 : مجموع نمرات دانش‌آموزان برابر نیست

داده‌های جدول را به صورت تصویر نمایش داده شده در نرم‌افزار وارد نمایید. متغیر X دانش‌آموزان متغیر Y دروس و متغیر Z نمرات کسب شده توسط دانش‌آموزان در هر یک از دروس است. (برای آموزش چگونگی ورود داده در نرم‌افزار S-PLUS به فایل "[معرفی نرم افزار و ورود داده](#)" صفحه‌ی آموزش نرم‌افزار S-PLUS در سایت [مرکز تحلیل آماری خوارزمی](#) مراجعه نمایید.)

	1	2	3
	x	y	z
1	1.00	1.00	15.00
2	2.00	2.00	18.00
3	3.00	3.00	16.00
4	4.00	1.00	20.00
5	5.00	2.00	16.00
6	1.00	3.00	19.00
7	2.00	1.00	15.00
8	3.00	2.00	19.00
9	4.00	3.00	17.00
10	5.00	1.00	19.00
11	1.00	2.00	18.00
12	2.00	3.00	17.00
13	3.00	1.00	18.00
14	4.00	2.00	17.00
15	5.00	3.00	20.00

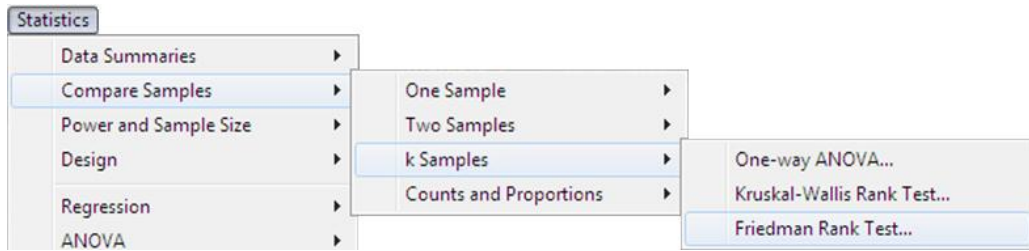
ستون مربوط به شماره‌ی دانش‌آموزان

ستون مربوط به دروس

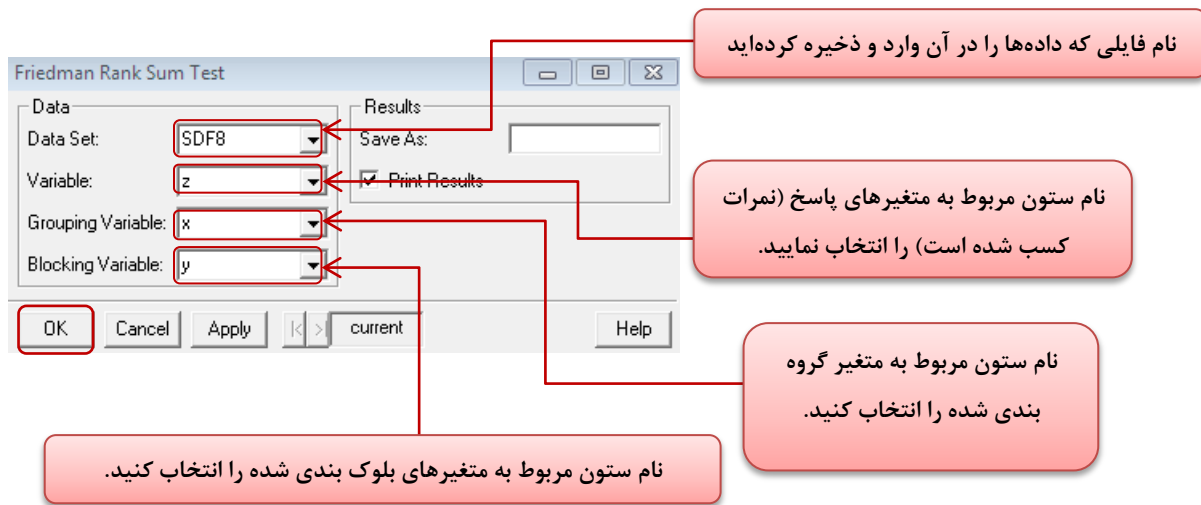
ستون مربوط به نمرات کسب شده توسط دانش‌آموزان در هر یک از دروس

پس از وارد کردن داده‌ها در نرم‌افزار برای انجام آزمون فریدمن مسیر را طی نمایید.

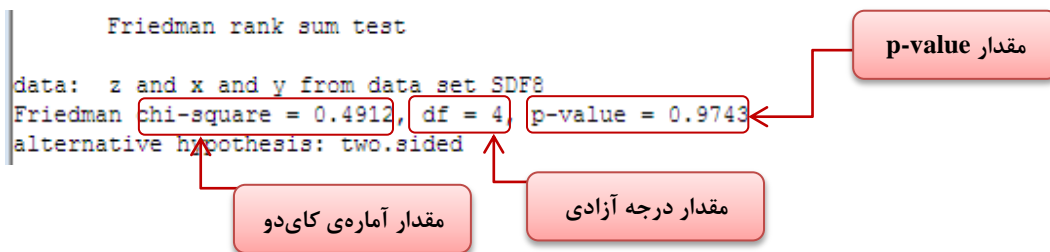
Statistics > Compare Samples > K Samples > Friedman Rank Test...



پس از آن پنجره‌ی زیر باز می‌شود.



پس از زدن دکمه‌ی OK پنجره‌ی مربوط به آزمون فریدمن باز می‌شود.



در گزارش داده شده توسط نرم افزار مقدار p-value، مقدار آماره‌ی کای دو و درجه آزادی محاسبه شده است. با توجه به مقدار $p\text{-value}=0.9742$ که از مقدار 0.05 بزرگتر است پس دلیل بر رد فرض صفر وجود ندارد. یعنی با احتمال 95% فرض صفر یعنی برابری مجموع نمرات دانش‌آموزان پذیرفته می‌شود.

در آزمون فریدمن (به طور کلی تمامی آزمونها در این دست) همواره در تشخیص بلوکها و گروه‌بندی‌ها دقت
نمایید تا نتیجه‌گیری مناسب بدست آید. طرح انجام شده در این مثال طرح کاملاً تصادفی نامیده می‌شود.

منبع:

- آموزش کاربردی و آموزش نرم افزار s-plus، گردآوردنگان دکتر مسعود نیکوکار، حبیب تربتی قره باغ،
مرضیه سهیلی راد، راضیه اولاد دیلمقانیان، انتشارات گسترش علوم پایه، ۱۳۸۴
- کاربرد نرم افزار s-plus در تحلیل آماری، تالیف: آیتین سعادت، مهدی مختارپور، زینب نوروزی،
انتشارات جهاد دانشگاهی واحد اصفهان، ۱۳۸۹