

ماتریس و حل معادله

(R)

تدوین: مرکز تحلیل آماری خوارزمی

www.kharazmi-statistics.ir

مرکز آماری خوارزمی

مقدمه:

از جمله امکاناتی که در نرم افزار R فراهم شده است امکان ورود ماتریس و انجام عملیات مرتبط با آن است. کاربر می تواند به وسیله ی این فرامین معادلات را حل نموده و نرم افزار جواب مجهول ها محاسبه می کند. در ادامه به بیان توضیحاتی در ارتباط با ماتریس و حل معادلات چند مجهولی می پردازیم.

در این متن مطالب زیر بیان شده است:

چگونگی ورود داده به صورت ماتریس و فراخوانی داده ها

چگونگی محاسبه دترمینان ماتریس

چهار عمل اصلی در ماتریس

جمع و تفریق در ماتریس ها

ضرب دو ماتریس ها

ترانهاده ماتریس

حل دستگاه معادلات

حل معادله درجه دو، سه و n

چگونگی ورود داده به صورت ماتریس و فراخوانی داده ها

برای ورود ماتریس به صورت دستی دستورات زیر را در صفحه ی فرامین نرم افزار بنویسید.

```
x<-matrix(c(4,7,3,2,8,9),nr=3,nc=2)
```

به جای عبارت nr می توان nrow و به جای عبارت nc می توان از عبارت ncol استفاده کرد. در صورت

```
> x<-matrix(c(4,7,3,2,8,9),nr=3,nc=2)
> x
      [,1] [,2]
[1,]    4    2
[2,]    7    8
[3,]    3    9
```

ننوشتن عبارت های nr و nc نرم افزار به صورت پیش فرض عدد اول را ستون و دوم را سطر در نظر می گیرد. و اعداد را به ترتیب در ستون اول ستون دوم و ... پر می کند. با نوشتن

```
> w=matrix(c(1,3,2,5,4,2,3,6,7,8),2,5)
> w
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    1    2    4    3    7
[2,]    3    5    2    6    8
```

عبارت X در خط بعدی داده های وارد شده به صورت ماتریس نمایش داده می شود. جابه جایی عبارت nr و nc خطایی را ایجاد نمی کند و محاسبات بدون مشکل انجام می

شود. همچنین به طور مثال برای فراخوانی داده سطر ۲ و ستون ۳ در ماتریس r باید عبارت r[2,3] را در خط فرمان تایپ نمایید.

```
> r[2,3]
[1] 5
```

جهت فراخوانی ستون خاصی (در این جا ستون دوم) عبارت r[,2] و فراخوانی سطر مد نظر (در اینجا سطر اول)

```
> r[,2]
[1] 5 7
> r[1,]
[1] 1 5 9
```

عبارت r[1,] را تایپ می کنید. خروجی نرم افزار به صورت تصویر روبرو می باشد.

محاسبه ی دترمینان

باری محاسبه ی دترمینان ماتریس از تابع det() استفاده می شود. دقت کنید که برای محاسبه دترمینان ماتریس حتما ماتریس مورد نظر باید مربع باشد. و سطر و ستون آنها با هم برابر باشد.

```
> d
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1    9    2
[2,]    5    3    4
[3,]    8    0    3
```

→

```
> det(d)
[1] 114
```

چهار عمل اصل در ماتریس ها

جمع و تفریق:

جمع و تفریق در ماتریس با عبارت های + و - انجام می شود و در صورت برابر بودن سطر و ستون ماتریس ها عملیات انجام می شود. در مثال این بخش تابع T , W به صورت زیر تعریف شده است.

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 8 \end{bmatrix} \quad T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 8 & 5 & 2 \\ 2 & 7 & 6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

همانطور که در تصویر ملاحظه می فرمایید حاصل جمع و تفریق دو ماتریس محاسبه شده است.

```

> W+T
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    2    5   12    8    9
[2,]    5   12    8   10    9

> W-T
      [,1] [,2] [,3] [,4] [,5]
[1,]    0   -1   -4   -2    5
[2,]    1   -2   -4    2    7

```

حاصل جمع دو ماتریس

حاصل تفریق دو ماتریس

ضرب و تقسیم دو ماتریس:

برای ضرب دو ماتریس از "%*%" استفاده می شود. در نوشتن ضرب ماتریس های به ترتیب ماتریس ها از نظر هماهنگی سطر یکی با ستون دیگری دقت نمایید تا در نرم افزار خطای ایجاد نشود. در اینجا $r \times x$ را محاسبه می کنیم.

```

> r*x
      [,1] [,2]
[1,]   66  123
[2,]   76  107

```

برای تقسیم دو ماتریس ابتدا لازم است معکوس ماتریس دوم را بدست آوریم. در واقع تقسیم دو ماتریس به صورت زیر است.

$$A/B = A * \frac{1}{B} = A * B^{-1}$$

B^{-1} ماتریس معکوس ماتریس B است.

ماتریسی دارای معکوس است که دارای دترمینان غیر صفر باشد. پس از وارد کردن درایه های ماتریس در نرم افزار عبارتهای زیر را نوشته تا ماتریس معکوس محاسبه گردد.

```

> z
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    1   -1   -1
[2,]   -1    2    3
[3,]    1    1    4

> det(z)
[1] 1

> solve(z)
      [,1] [,2] [,3]
[1,]    5    3   -1
[2,]    7    5   -2
[3,]   -3   -2    1

```

تابع Z به صورت روبرو تعریف شده است. پس از محاسبه ی دترمینان تابع با نوشتن تابع solve دترمینان ماتریس Z محاسبه می گردد. و پس اظ آن با تعریف ماتریسی جدید به عنوان ماتریس معکوس ($v=solve(z)$) و ضرب دو ماتریس مثلا f و v در حقیقت حاصل تقسیم ماتریس دو ماتریس مورد نظر بدست آمده است.

$$f/z = f * z^{-1} = f * v$$

دقت داشته باشید که استفاده از علامت "*" و "/" به تنهایی درایه ها متناظر در دو ماتریس را با هم ضرب و یا تقسیم می کنند.

ترانهاده

```
> q=t(w)
```

```
> q
```

```
      [,1] [,2]  
[1,]    1    3  
[2,]    2    5  
[3,]    4    2  
[4,]    3    6  
[5,]    7    8
```

برای ترانهاده کردن ماتریس باید از تابع $t()$ استفاده نمایید. به طور مثال q ترانهاده ماتریس w تعریف شده است. در تابع ترانهاده سطر و ستون جابه جا می شوند.

حل دستگاه معادلات خطی

یکی دیگر از کاربرد های ماتریس حل دستگاه معادلات خطی است. فرض کنید دو معادله و دو مجهول زیر داده

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 7 \end{cases}$$

شده است برای حل آن باید به صورت زیر عمل نمایید.

تابع s ماتریسی است از ضرایب معادلات و عدد 2 برای تعداد ستون های ماتریس است. چون تعداد عناصر ماتریس به صورت مربع است نیازی به نوشتن تعداد سطرها نداریم. تابع g پاسخ های هر یک از معادلات است. برای حل معادله باید از تابع $solve$ استفاده شود. به صورتی که در تصویر نوشته شده است در صفحه فرامین

```
> s<-matrix(c(4,6,2,1),nrow=2)  تایپ می کنیم. پس از تایپ تابع پاسخ به صورت روبرو نمایش داده  
> g<-c(8,7)  می شود.  
> solve(s,g)  
[1] 0.75 2.50
```

حل معادله درجه دو، سه و n

برای حل این دست معادلات باید از تابع $polyroot()$ در نرم افزار R استفاده نمایید. این قسمت به همراه یک مثال شرح داده می شود.

✓ معادله ی درجه دو $3x^2 - 5x + 6 = 8$ را حل نمایید.

برای تعریف معادله بالا در نرم افزار ابتدا تمام مقادیر را یک طرف مساوی قرار می دهیم و عبارت به صورت

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

زیر مرتب می کنیم.

سپس به صورت زیر در صفحه فرامین تایپ نمایید. دقت داشته باشید که ترتیب نوشتن اعداد در تابع c به ترتیب درجه ضرایب از کمتر به بیشتر است. -2 با درجه صفر، -5 با درجه یک و 3 با درجه دو به ترتیب نوشته می شود.

> polyroot(c(-2,-5,3))

```
> polyroot(c(-2,-5,3))  
[1] -0.3333333+0i 2.0000000-0i
```

همانطور که در تصویر مشاهده می کنید نرم افزار دو پاسخ برای x را محاسبه کرده است. در مواردی که عدد مختلط باشد از عبارت i برای نمایش عدد مختلط استفاده می شود و در غیر این صورت ضریب i را صفر در نظر می گیرد.

✓ معادله $4x^3 - x + 5 = 2$ حل نمایید.

معادله را به صورت زیر بازنویسی می کنیم. $4x^3 - x + 3 = 0$ در این عبارت ضریب برای جمله درجه دوم وجود ندارد که در نرم افزار به صورت 0 تعریف می کنیم. عبارت زیر را در نرم افزار تایپ نمایید.

> polyroot(c(3,-1,0,4))

```
> polyroot(c(3,-1,0,4))  
[1] 0.5+0.7071068i -1.0+0.0000000i 0.5-0.7071068i
```

همانطور که مشاهده می کنید سه پاسخ برای x بدست آمده است. اعداد مختلط هستند که در نرم افزار محاسبه شده است.

✓ معادله $a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x^2 + a_nx^1 + b = 0$ را حل نمایید.

برای حل معادله درجه n نیز همانند حالت‌های قبلی عبارت زیر را در نرم افزار تایپ می کنیم.

> polyroot(c(b,a₁, a₂, a₃, ..., a_{n-1}, a_n))

این حالت نیز مانند حالت های قبل پاسخ ها در نرم افزار محاسبه می شود.

منبع:

منوی help نرم افزار

آشنایی با زبان محاسبات R، سید سعید موسوی ندوشنی، پاییز ۱۳۹۱

www.tipy.ir