

آزمون ویلکاکسون

(S-PLUS)

تدوین: مرکز تحلیل آماری خوارزمی

www.kharazmi-statistics.ir

مرکز آماری خوارزمی

مقدمه:

آزمون ویلکاکسون از آزمون های آماری ناپارامتری است که برای ارزیابی همانندی دو نمونه وابسته با مقیاس رتبه ای به کار می رود. این آزمون برای طرح های ماقبل و مابعد مناسب است. همچون بررسی فشار خون قبل و بعد از مصرف دارویی خاص و یا دو نمونه که از یک جامعه. این آزمون اندازه تفاوت میان رتبه ها را در نظر می گیرد بنابراین متغیرها می توانند دارای جوابهای متفاوت و یا فاصله ای باشند. آزمون ویلکاکسون متناظر آزمون t دو نمونه ای وابسته است و در صورت نداشتن شرایط آزمون t جانشین خوبی برای آن است. نمونه های به کار رفته در این آزمون باید نسبت به سایر صفت هایشان جور شده (جفت شده) باشند.

در این متن مطالب زیر بیان شده است:

آزمون رتبه ای ویلکاکسون (*One sample Wilcoxon signed rank test*)

انجام آزمون رتبه ای ویلکاکسون در نرم افزار

تحلیل خروجی آزمون رتبه ای ویلکاکسون

آزمون دو نمونه ای ویلکاکسون (*Two-Sample Wilcoxon test*)

انجام آزمون دونمونه ای ویلکاکسون در نرم افزار

تحلیل خروجی آزمون دونمونه ای ویلکاکسون

آزمون رتبه ای ویلکاکسون (*One sample Wilcoxon signed rank test*)

آزمون رتبه ای ویلکاکسون، معادل ناپارامتری آزمون t تک نمونه ای می باشد. برای اینکه بدانیم میانه یک جامعه برابر یک مقدار ویژه ای است یا نه از این آزمون استفاده می کنیم. در واقع هدف از انجام آزمون تعیین معنی دار بودن اختلاف میانه یک جامعه با مقدار مشخص شده M_0 می باشد. می خواهیم یکی از آزمون های زیر را انجام دهیم:

$$(1) \quad \begin{cases} H_0: M_a \leq M_0 \\ H_1: M_a > M_0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} H_0: M_a \geq M_0 \\ H_1: M_a \neq M_0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} H_0: M_a = M_0 \\ H_1: M_a \neq M_0 \end{cases}$$

از مقادیر نمونه ای x_i تفاضل $(x_i - M_0)$ را به دست آورده و آنها را به ترتیب صعودی (صرف نظر از علامتشان) مرتب می کنیم. مقادیر نمونه ای مساوی M_0 در تجزیه و تحلیل وارد نمی شود. اکنون تعدادی رتبه، جایگزین تفاضل ها شده اند وقتی که چند نتیجه مساوی داشته باشیم رتبه ای معادل با متوسط رتبه های بعدی موجود را به آنها اختصاص می دهیم. آنگاه به اعداد ترتیبی علامتی متناظر با اختلاف هایشان می دهیم. آماره آزمون ویلکاکسون مجموع رتبه های با علامت مثبت می باشد. البته در بعضی کتب قدر مطلق مجموع رتبه ها با علامت منفی را مقدار آماره آزمون ویلکاکسون در نظر می گیرد، در جداول مربوط به آنها نیز متفاوت است. فرض H_0 وقتی رد می شود که آماره آزمون ویلکاکسون در ناحیه بحرانی قرار بگیرد که ناحیه بحرانی با توجه به حجم نمونه و میزان α از جداول مربوط بدست می آید.

انجام آزمون رتبه ای ویلکاکسون در نرم افزار

در ابتدا سری داده های پیش فرض، قرار گرفته شده در نرم افزار را فراخوانی می کنیم. برای آموزش چگونگی فراخوانی داده های پیش فرض به فایل "[معرفی نرم افزار](#)" در سایت مرکز تحلیل آماری خوارزمی مراجعه نمایید.

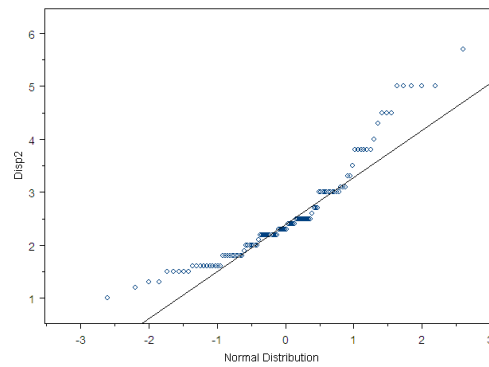
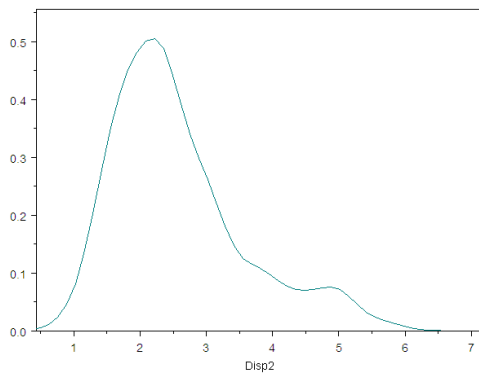
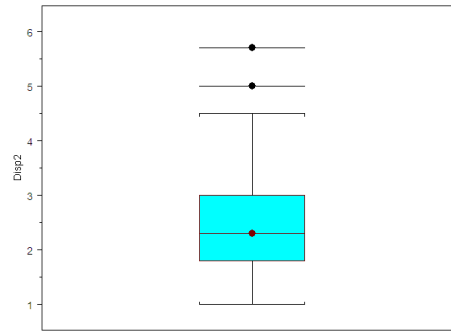
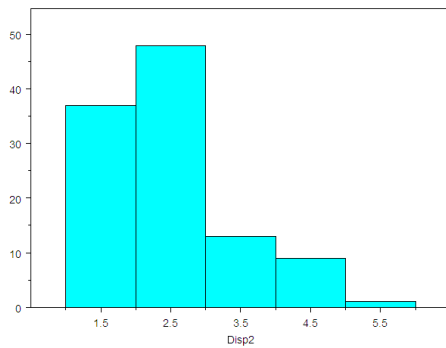
این متن سری داده ی Car انتخاب شده است. سری داده موجود اطلاعات ۱۱۱ نوع از انواع اتومبیل ها را در ۳۶ فاکتور مختلف بیان کرده است. متغیری که در این بخش آزمون می شود متغیر Disp2 است. آزمون در نظر گرفته شده برای این بخش به صورت روبرو است.

$$\begin{cases} H_0: M = 2 \\ H_1: M \neq 2 \end{cases}$$

پیش از انجام هر کاری ضروری است که داده ها را از نظر وجود مقادیر پرت یا شکل توزیع بررسی کنیم. برای این منظور نمودارهای جعبه ای، هیستوگرام، QQ-Normal، و Density مربوط به داده ی مورد بررسی (Disp2) را رسم می کنیم.

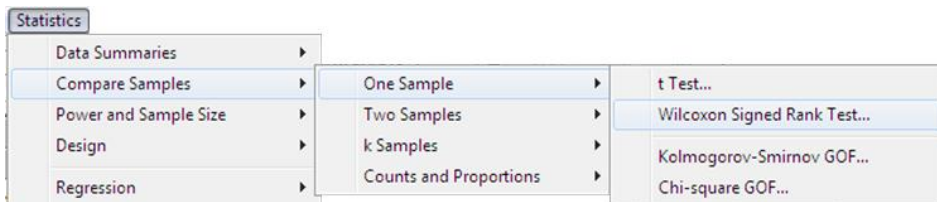
برای آموزش چگونگی رسم نمودار در نرم افزار s-plus به فایل "[رسم نمودار](#)" در صفحه ی آموزش نرم افزار در سایت مرکز تحلیل آماری خوارزمی مراجعه نمایید.

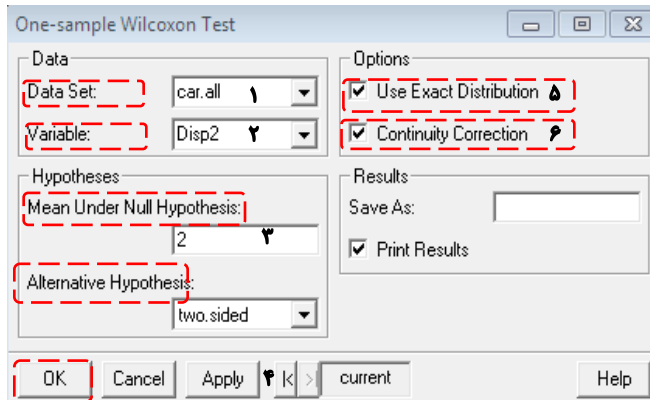
نمودارهای رسم شده برای تعیین نرمال بودن توزیع:



با توجه به نمودارهای رسم شده، نمودارها به وضوح چوله به سمت راست هستند. بنابراین توزیع داده ها نه تنها نرمال بلکه تقریباً نرمال نیز نیست. در نتیجه نمی توان از آزمون t استودنت استفاده کرد. چراکه پیش فرض آن آزمون نرمال بودن توزیع مشاهدات است. لذا باید از معادل ناپارامتری آن یعنی آزمون ویلکاکسون استفاده کنیم. برای اجرای این آزمون مراحل زیر را طی نمایید.

Statistics > compare samples > one sample > Wilcoxon signed rank test...





پس از آن پنجره ی روبرو باز می شود. مطالب و توضیحات مربوط به هر یک از کادرها در ادامه بیان شده است و مطالب با آنها کادرهای را پر کنید.

۱. نام سری داده های مورد بررسی بیان می شود. در اینجا سری exsurf انتخاب شده است.

۲. متغیری که برای انجام تست مدنظر است را انتخاب می کنیم. در اینجا متغیر V1 انتخاب شده است.

۳. مقدار میانگین تحت فرض صفر را می نویسیم. در این مثال میانگین مورد نظر برای انجام تست مقدار (-0.05) است.

۴. در این کادر نوع فرض صفر را انتخاب می کنیم. در اینجا، فرض دو طرفه انتخاب شده است. دو گزینه دیگر فرض های یک طرفه کمتر از و بزرگتر از مقدار میانگین هستند.

۵. این آیکون برای استفاده از توزیع دقیق آماره است.

۶. برای استفاده دقیق تقریب تصحیح پیوستگی می توان از این گزینه استفاده کرد.

پس از پر کردن فیلدهای مورد نظر، دکمه ی OK را بزنید تا نتایج نرم افزار مشابه تصویر پایین نمایش داده شود.

```

Wilcoxon signed-rank test

data: Disp2 in car.all
signed-rank normal statistic with correction [Z = 5.3724], [p-value = 0]
alternative hypothesis: mu is not equal to 2

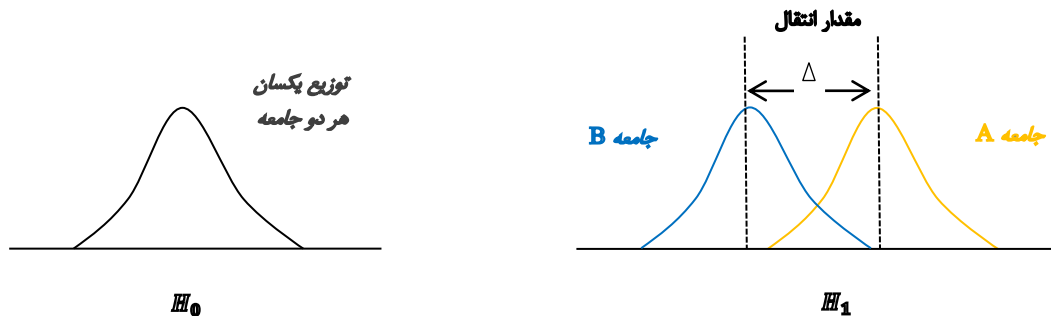
```

تحلیل خروجی نرم افزار:

همان طور که مشاهده می کنیم آماره مورد نظر آماره Z است. برای تحلیل خروجی های بدست آمده از نرم افزار، کافی است مقدار p-value را مد نظر قرار دهید. از آنجا که مقدار p-value از عدد 0.05 کوچکتر است پس در سطح اطمینان 95% فرض صفر رد می شود. یعنی میانه متغیر مورد بررسی برابر 2 نیست و با 2 اختلاف معنی داری دارد.

آزمون دو نمونه ای ویلکاکسون (Two-Sample Wilcoxon test)

آزمون مجموع رتبه ای ویلکاکسون شیوه ای ناپارامتری است که به صورتی متداول برای تعیین اینکه آیا مواضع دو جامعه ی همشکل، با هم متفاوت اند یا نه، به کار می رود... توجه کنید که هیچ فرضی در مورد شکل توزیع در نظر گرفته نشده است. شکل زیر فرض های H_0 و H_1 آزمون مجموع رتبه ای ویلکاکسون را نشان می دهد.



فرضیات این آزمون به صورت زیر می باشد:

۱. توزیع دو جامعه پیوسته و همشکل هستند. اما ممکن است به اندازه Δ اختلاف موضع داشته باشند.

۲. نمونه های تصادفی مستقل به حجم های n_1 و n_2 از دو جامعه استخراج شده اند.

توجه داشته باشید این آزمون معادل آزمون من ویتنی mann-whitney است.

دو نمونه تصادفی و مستقل $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ و $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ را به ترتیب از توزیع های $X \approx F(x)$ و $Y \approx G(y)$ در نظر می گیریم. می توان نشان داد که بین متغیر های x و y رابطه $y \approx x + c$ برقرار است. پارامتر مجهول c را پارامتر تغییر مبدا می نامند.

حال می خواهیم یکی از آزمون های زیر را انجام دهیم:

$$(1) \quad \begin{cases} H_0: c \leq 0 \\ H_1: c > 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} H_0: c \geq 0 \\ H_1: c \neq 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} H_0: c = 0 \\ H_1: c \neq 0 \end{cases}$$

در اینجا آزمون (الف) را کامل بیان می کنیم. آزمون های (ب) و (ج) مشابه با آزمون (الف) می باشند. پس می خواهیم آزمون زیر را انجام دهیم.

نمونه ترکیبی $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ و $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ را می توان به چشم یک نمونه $N = n + m$ تایی نگاه کرد. فرض می کنیم در این نمونه ترکیبی R_i رتبه x_i و S_i رتبه y_i باشد. آنگاه $Q = (R_1, K, R_m, R_1, K, R_m)$ یک جایگشت برای $(1, K, N)$ می باشد. و داریم:

$$\sum_{i=1}^m R_i + \sum_{j=1}^n S_j = \sum_{k=1}^N K = \frac{N(N-1)}{2}$$

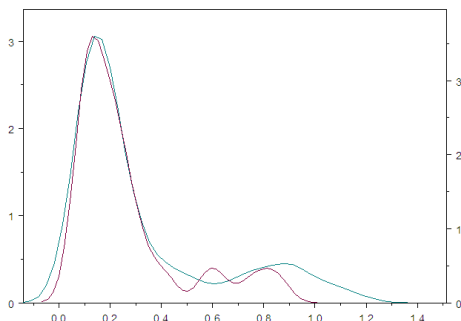
واضح است که تحت فرض H_0 نمونه ترکیبی بالا یک نمونه تصادفی N تایی از $F(x)$ و آماره های $w_i = \sum_{i=1}^m R_i$ و $w_s = \sum_{j=1}^n S_j$ هم یک آماره رتبه ای ناپارامتری می باشد. این دو آماره را که مجموع آنها با مقدار ثابت $\frac{N(N-1)}{2}$ می باشد آماره های جمعی رتبه ای ویلکاکسون می نامند. ناحیه بحرانی برابر است با $\{w_s \leq k\}$ بنابراین هرگاه $w_s = \sum_{j=1}^n S_j$ خیلی بزرگ شود H_0 را رد می کنیم. دقیقاً اگر خطای نوع اول را α بگیریم و داشته باشیم:

$$P_{H_0}(w_s \geq w_\alpha(m, n)) = \alpha$$

آنگاه $k = w_\alpha(m, n)$ واضح است که مقدار ثابت $w_\alpha(m, n)$ به حجم نمونه ها و خطای نوع اول بستگی دارد و برای تعیین آن باید از توزیع w_s تحت فرض H_0 استفاده کرد.

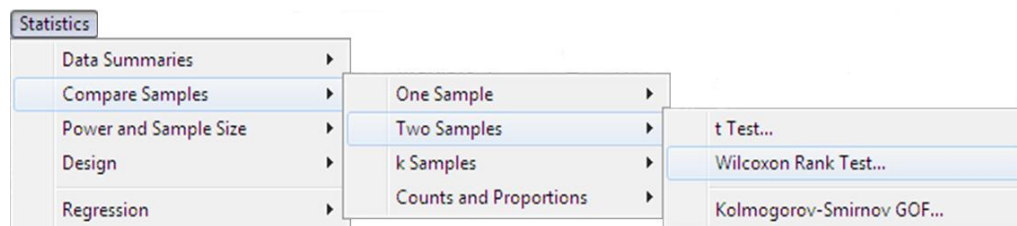
انجام آزمون دونمونه ای ویلکاکسون در نرم افزار

در این مرحله داده های sensor از سری داده های پیش فرض را انتخاب می کنیم. و متغیرهای v3, v6 را آزمون می کنیم. در پایین تصویر نمودار نرمال بودن برای دو متغیر رسم شده است. به وضوح چوله است و از توزیع نرمال تبعیت نمی کند. رسم دیگر نمودارهای بیان شده همانند قسمت اول نیز چوله را تصدیق می کند.

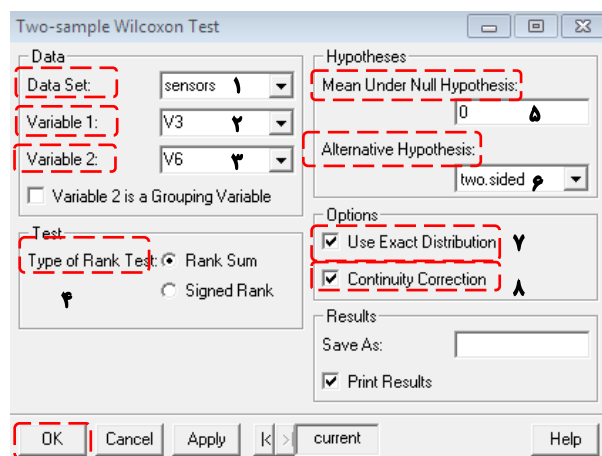


حال برای داده های انتخاب شده در حالت قبل نیز می خواهیم آزمون را انجام دهیم. مراحل زیر را طی نمایید.

Statistics > compare samples > two sample > Wilcoxon signed rank test...



سپس پنجره پایین باز می شود. توضیحات هر یک از قسمت ها با توجه به شماره ای که برای آنها قرار داده شده است بیان گردید.



۱. در این کادر نام سری داده هایی مورد بررسی را قرار می دهیم.
۲. نام متغیر اول در سری داده ها که قصد آزمون داریم را انتخاب می کنیم.
۳. نام متغیر دوم در سری داده ها که قصد آزمون داریم را انتخاب می کنیم. گزینه ی variable 2 is a Grouping Variable را در صورتی که متغیر دوم یک گروه از متغیرها است تیک دار می کنند.

۴. در این قسمت گزینه ی Rank Sum را انتخاب می کنیم گزینه ی دومی Signed Rank به معنای آزمون رتبه ای علامت دار ویلکاکسون می باشد. این آزمون معادل ناپارامتری آزمون t زوج شده است که از اطلاعات مربوط به اندازه اختلاف بین دو عضو یگ گروه استفاده می کنند. برای استفاده از این آزمون باید:

- جامعه تفاضل ها پیوسته و متقارن باشد.
- تعداد n تفاضل، نمونه ای تصادفی از جامعه تفاضل ها باشد.
- ۵. مقدار صفر را برای میانگین آزمون در نظر می گیریم.
- ۶. فرض مقابل در این آزمون را دوطرفه در نظر می گیریم.
- ۷. این آیکون برای استفاده از توزیع دقیق آماره است.
- ۸. برای استفاده دقیق تقریب تصحیح پیوستگی می توان از این گزینه استفاده کرد.

و در پایان با توجه به تنظیماتی که انجام شده دکمه ی ok را زده تا نتایج محاسبه شده در نرم افزار نمایش داده شود. نتایج به صورت زیر است.

تحلیل آزمون:

```
Wilcoxon rank-sum test
```

```
data: x: V3 in sensors , and y: V6 in sensors
```

```
rank-sum normal statistic with correction Z = 0.7354, p-value = 0.4621
```

```
alternative hypothesis: mu is not equal to 0
```

همان طور که مشاهده می شود

آماره محاسبه شده آماره ی Z

مقدار p-value برابر ۰.۴۶۲۱ است. و با توجه به اینکه این مقدار از ۰.۰۵٪ بزرگتر است پس دلیل بر رد فرض صفر وجود ندارد. و فرض صفر یعنی برابری مقدار میانگین متغیر ۷۳ و ۷۶ پذیرفته می شود و تفاوت معنی داری با هم ندارد.

منبع:

- آموزش کاربردی و آموزش نرم افزار s-plus، گردآوردنگان دکتر مسعود نیکوکار، حبیب تربتی قره باغ، مرضیه سهیلی راد، راضیه اولاد دیلمقانیان، انتشارات گسترش علوم پایه، ۱۳۸۴
- کاربرد نرم افزار s-plus در تحلیل آماری، تالیف: آیتین سعادت، مهدی مختارپور، زینب نوروزی، انتشارات جهاد دانشگاهی واحد اصفهان، ۱۳۸۹